

Jedan teorijski dokaz Dopplerovog efekta i učinak pri mjerenju brzine radarom

Filip Vučić¹

Uvod

U članku je pokazan izvod matematičke formulacije Dopplerovog efekta na primjeru iz svakodnevnog života. Dopplerov efekt nazvan je po austrijskom matematičaru i fizičaru Christianu Doppleru koji ga je i formulirao. Dopplerov efekt kaže da ako se opažač giba nekom brzinom v , a izvor valova frekvencije f nekom brzinom u , tada opažač opaža frekvenciju f' koja je jednaka:

$$f' = \frac{f(v + c)}{c - u},$$

gdje je c brzina vala u sredstvu. Pri tome brzine u i v imaju pozitivan predznak za približavanje, a negativan za udaljšavanje. Klasičan izvod Dopplerovog efekta može se naći u [1].

Opis događaja

Događaj 1. Netko kuca na vaša vrata tako da nakon svakog vremenskog intervala Δt pokuca jednom. Vi ste krenuli prema vratima nekom brzinom v , a brzina zvuka u zraku iznosi c . Opažate da se svako kucanje događa nakon nekog vremenskog intervala $\Delta t'$. Nemate pametnijeg posla i odlučili ste izračunati koliki je taj interval $\Delta t'$.

Događaj 2. Vi ste znatiželjan susjed i stalno ste pokraj prozora. Pored vas upravo prolaze jureća kola hitne pomoći brzinom v , a brzina zvuka u zraku je c . Našli ste informaciju kolika je frekvencija sirene hitne pomoći i odredili da je to neka frekvencija f . Zanima vas na kojoj frekvenciji f' vi čujete sirenu kola hitne pomoći.

Pomoću događaja 1, odredit ćemo koju frekvenciju opažač opaža kad se giba, dok izvor miruje, a pomoću događaja 2 koju frekvenciju opažač opaža kad on miruje, dok se izvor valova giba. Kombiniranjem se daje izvesti izraz iz uvoda.

Izvod matematičke formulacije Dopplerovog efekta

Događaj 1. Opažač je u nekom trenutku udaljen od vrata za neku udaljenost d i u tom trenutku zvuk kucanja počinje putovati prema njemu. Relativna brzina približavanja iznosi $c + v$, a brzina izvora jest $u = 0$. Zato vrijedi $d = (c + v) \cdot t$ gdje je t vrijeme nakon kojeg opažač čuje zvuk kucanja. Do sljedećeg će kucanja proći vremenski interval

¹ Učenik je prvog razreda XV. gimnazije u Zagrebu; e-pošta: fico.sah@gmail.com

$\Delta t - t$ i opažač će u trenutku sljedećeg kucanja od vrata (izvora) biti udaljen

$$d - v(\Delta t - t) - vt = (c + v)t - v(\Delta t - t) - vt = ct + vt - v\Delta t.$$

Opazač će ponovno čuti zvuk za vrijeme t' pa vrijedi:

$$\begin{aligned} ct + vt - v\Delta t &= (c + v)t' \\ (c + v)t - v\Delta t &= (c + v)t' \\ t' &= t - \frac{v\Delta t}{c + v}. \end{aligned}$$

Sada se može vidjeti da je zvuku prvo trebalo vrijeme t da ga opažač čuje. Nakon toga je protekao vremenski interval $\Delta t - t$, dok zvuk ponovno nije krenuo putovati, i nakon vremena t' opažač je opet čuo zvuk kucanja. Iz toga se može zaključiti da vrijedi

$$\Delta t' = t' + \Delta t - t,$$

iz čega uvrštavanjem t' slijedi:

$$\Delta t' = t - \frac{v\Delta t}{c + v} + \Delta t - t = \Delta t - \frac{v\Delta t}{c + v}.$$

Uz $f' = \frac{1}{\Delta t'}$ i $f = \frac{1}{\Delta t}$, dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= \frac{1}{f} - \frac{v}{f(c + v)} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{v}{(c + v)} \right) \\ f' &= \frac{f}{1 - \frac{v}{(c + v)}} = \frac{f(c + v)}{c}. \end{aligned}$$

Ako se u jednadžbu iz uvoda uvrsti $u = 0$, dobit će se upravo izvedeni izraz što potvrđuje točnost izvoda.

Događaj 2. U nekom trenutku kola hitne pomoći udaljena su od opažača za neku udaljenost d i točno u tom trenutku sirena emitira zvučni val frekvencije f brzinom c približavajući se promatraču brzinom u . Sada vrijedi $u > 0$ i $v = 0$. Val se ovoga puta sam približava promatraču pa vrijedi:

$$d = ct$$

gdje je t vrijeme nakon kojeg će opažač čuti sirenu. Do emitiranja idućeg vala proći će vrijeme $\frac{1}{f} - t = \Delta t - t$. Za to će vrijeme kola hitne pomoći prijeći put $u(\Delta t - t)$ i od promatrača će biti udaljena:

$$d - u(\Delta t - t) - ut = ct - u(\Delta t - t) - ut.$$

Zvuku će ovaj put trebati vrijeme t' da dođe do opažača pa se može pisati:

$$\begin{aligned} ct - u(\Delta t - t) - ut &= ct' \\ t' &= t - \frac{u(\Delta t - t)}{c} - \frac{ut}{c}. \end{aligned}$$

Zvuku je trebalo vrijeme t' da dođe do opažača, no prije početka emitiranja proteklo je vrijeme $\Delta t - t$ pa vrijedi

$$\Delta t' = t' + \Delta t - t.$$

Uvrštavanjem t' u prethodnu jednadžbu redom se dobiva:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t - \frac{u(\Delta t - t)}{c} - \frac{ut}{c} + \Delta t - t \\ &= -\frac{u(\Delta t - t)}{c} - \frac{ut}{c} + \Delta t \\ &= -\frac{u}{c}\Delta t + \Delta t = \Delta t \left(-\frac{u}{c} + 1 \right) \\ c\Delta t' &= \Delta t(c - u).\end{aligned}$$

Uvrštavanjem f i f' dobiva se:

$$f' = f \frac{c}{c - u}.$$

Uvrštavanjem $v = 0$ u Dopplerovu jednadžbu dobiva se upravo gornja jednadžba što je potvrda točnosti ovog izvoda. Izraz iz uvoda sada se može dobiti na jednostavan način. Ako se gibaju i promatrač i izvor, tada frekvencije treba promatrati parcijalno. Promatrač će, gibajući se brzinom v , frekvenciju vala f koji putuje brzinom c opaziti kao frekvenciju f' koja je, kao što je pokazano, jednaka:

$$f' = \frac{f(c + v)}{c}.$$

No, budući da se giba i izvor brzinom u , promatrač će frekvenciju f' opaziti kao frekvenciju f'' koja je jednaka:

$$f'' = f' \frac{c}{c - u}.$$

Rješavanjem gornjih dviju jednadžbi supstitucijom f' , dobiva se upravo Dopplerova jednadžba koja glasi:

$$f'' = \frac{f(v + c)}{c - u}.$$

Time je izvod jednadžbe Dopplerovog efekta završen.

Dopplerov efekt i mjerenje brzine radarom

Policija često mjeri brzinu vozila radarom. On ispaljuje ultrazvučne valove brzinom c i nekom frekvencijom f . Oni se odbijaju od automobila koji se giba brzinom v i detektor ih prima. Budući da radar miruje, vrijedi $u = 0$. Automobil se može zamisliti kao opažač poslanog vala, ali i kao izvor odbijenog vala. Radar prvo šalje val frekvencije f . Kad bi postojao opažač na automobilu, on bi opažao frekvenciju f' koja je po Dopplerovom efektu jednaka

$$f' = \frac{f(c + v)}{c}.$$

To je ujedno i frekvencija odbijenih valova koju će radar registrirati kao f'' pa vrijedi

$$f'' = f' \frac{c}{c - u}.$$

Rješavanjem sustava gornjih dviju jednadžbi supstitucijom f' , dobiva se

$$f'' = \frac{f(v + c)}{c - u}.$$

No, valja primijetiti kako je $u = v$ jer je na automobilu izvor odbijenih valova pa se dobiva:

$$f'' = \frac{f(v + c)}{c - v}.$$

Dakle, ako je na detektoru postavljen mjerač frekvencije f'' , tada će policijski uređaj lako odrediti brzinu po izrazu:

$$f'' = \frac{f(v + c)}{c - v}$$
$$v = \frac{c(f'' - f)}{(f'' + f)}.$$

Literatura

- [1] VIŠNJA HENČ-BARTOLIĆ, PETAR KULIŠIĆ, *Valovi i optika*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.